

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Αναλογίες

7.3 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Ορισμός: Λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ ονομάζεται ο αριθμός λ για τον

οποίο ισχύει: $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \iff \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$

Ορισμός: Μέτρο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που θεωρείται μονάδα μέτρησης.

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Ορισμός: Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων. Η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι μία αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α , β , γ και δ .

Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ αντίστοιχα. Τα α και δ λέγονται ἄκροι όροι, ενώ τα β και γ μέσοι όροι της αναλογίας.

Ιδιότητες των αναλογιών



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$$



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \quad (\text{εναλλαγή μέσων όρων})$$



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\text{εναλλαγή ἄκρων όρων})$$



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$$



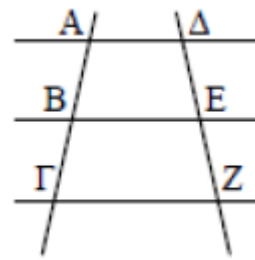
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$$

7.7 Το Θεώρημα του Θαλή

Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή με βάση το σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

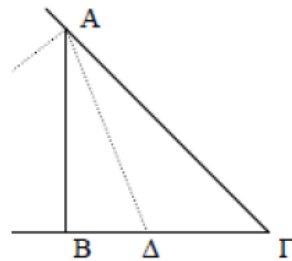


7.8 Θεωρήματα Διχοτόμων

Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου, χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

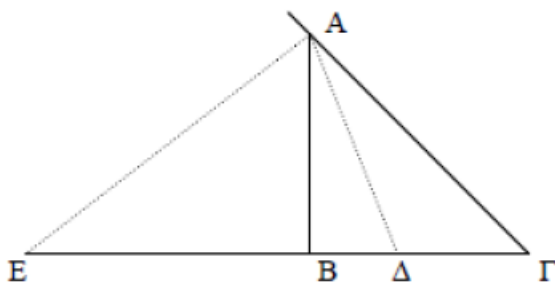
Δηλαδή στο διπλανό σχήμα ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Αν η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς, τότε χωρίζει εξωτερικά αυτήν την πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, στο σχήμα ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E}$. Η ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος του ΑΒΓ.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ομοιότητα

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ορισμός: Όμοια λέγονται δύο τρίγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

Ορισμός: Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων λέγεται ο λόγος δύο πλευρών που είναι απέναντι από αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια προς ένα τρίτο, τότε θα είναι και μεταξύ τους όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι πάντα όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1$.
- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε όλα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους έχουν λόγο ίσο με το λόγο ομοιότητας τους.

8.2 Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

1^ο Κριτήριο Ομοιότητας

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία

2^ο Κριτήριο Ομοιότητας

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών γωνίες τους ίσες.

3^ο Κριτήριο Ομοιότητας

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές Σχέσεις

9.1 Ορθές Προβολές

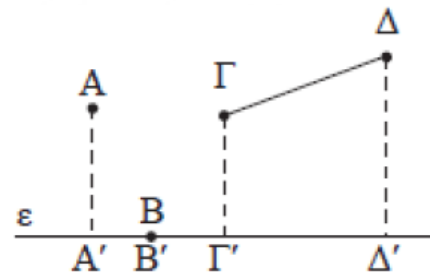
Προβολή σημείου σε ευθεία

Δίνεται ευθεία ε και σημείο A που δεν ανήκει σε αυτή. **Ορθή προβολή** ή απλά **προβολή** του σημείου A στην ε λέγεται το ίχνος A' , της καθέτου που άγεται από το A προς την ε . Αν κάποιο σημείο, όπως το B , ανήκει στην ευθεία ε , η προβολή του B είναι το ίδιο το B .

Προβολή ευθύγραμμου τμήματος σε ευθεία

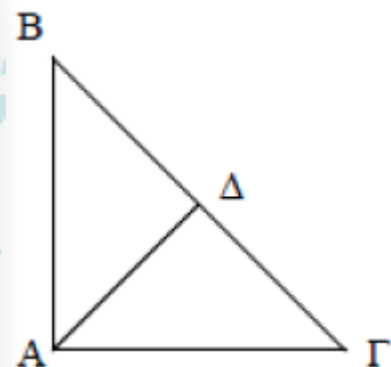
Προβολή ενός τμήματος $\Gamma\Delta$ πάνω σε μια ευθεία ε λέμε το τμήμα $\Gamma'\Delta'$ που έχει άκρα τις προβολές Γ' και Δ' των άκρων Γ και Δ του τμήματος $\Gamma\Delta$.

Αν ο φορέας ενός τμήματος $ΚΛ$ είναι κάθετος στην ε τότε οι προβολές των K και L συμπίπτουν. Έτσι η προβολή του $ΚΛ$ είναι ένα σημείο, δηλαδή έχει μέτρο 0.



Πίνακας μετρικών σχέσεων για ορθογώνια τρίγωνα

$AB^2 = BD \cdot B\Gamma$	ή	$\gamma^2 = BD \cdot \alpha$
$AG^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$	ή	$\beta^2 = \Gamma\Delta \cdot \alpha$
$B\Gamma^2 = AG^2 + AB^2$	ή	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
$A\Delta^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$	ή	$\alpha^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$
$AG \cdot AB = B\Gamma \cdot A\Delta$	ή	$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \nu_\alpha$



Θεώρημα 1

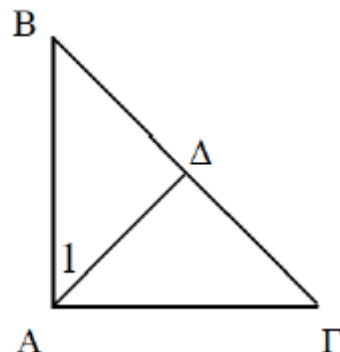
Αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο της προβολής της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα.

Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες με πλευρές κάθετες. Από την ομοιότητα

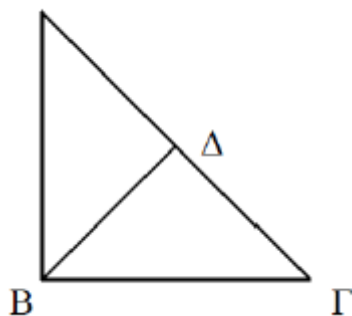
προκύπτει ότι: $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$



Θεώρημα 2

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

A



Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος AΔ και ισχύουν σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα οι σχέσεις:

$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ και $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$ και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Delta \cdot B\Gamma + \Delta\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma \cdot (B\Delta + \Delta\Gamma) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$$

Θεώρημα 3

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή.

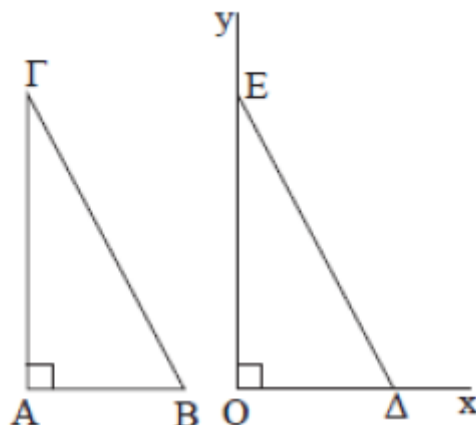
Απόδειξη

Πάνω στις πλευρές Ox, Oy της ορθής γωνίας $\hat{O}$ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα OΔ = AB και OE = AΓ. Επειδή το τρίγωνο OΔΕ είναι ορθογώνιο, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε:

$$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

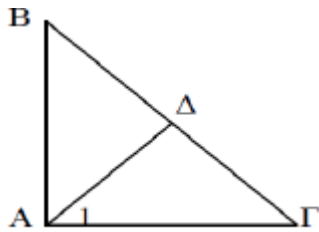
Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ABΓ και OΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε

$\hat{A} = \hat{O} = 1L$, που είναι το ζητούμενο.



Θεώρημα 4

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.



Απόδειξη

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος AΔ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABΔ και AΔΓ είναι όμοια γιατί $\hat{B} = \hat{A}_1$, ως συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{A}$.

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \text{ ή } A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

9.4 Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Θεώρημα 1

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

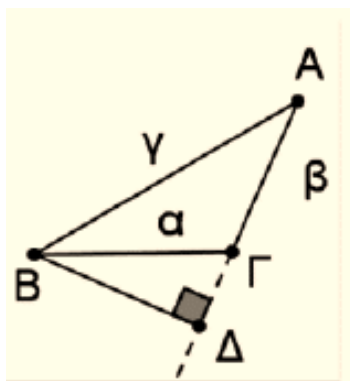
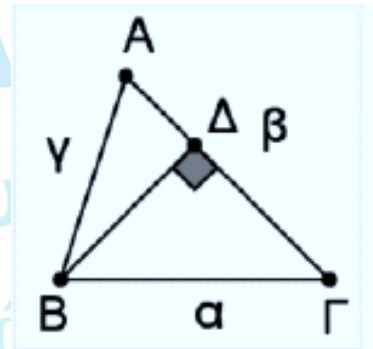
Έστω ότι στο διπλανό τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} < 90^\circ$ και AΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη βάση β. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBΓ, ΔBA έχουμε με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 90^\circ$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:



Αν $\hat{A} < 90^\circ$ το Δ βρίσκεται μεταξύ των Α, Γ οπότε $\Delta\Gamma = \beta - A\Delta$

Αν $\hat{A} > 90^\circ$ το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α, Δ οπότε $\Delta\Gamma = A\Delta - \beta$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $A\Delta^2 = \gamma^2 - \Delta B^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Αν τέλος $\hat{A} = 180^\circ$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$, αφού $A\Delta = \beta$.

Θεώρημα 2

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} > 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος αντίστοιχα:

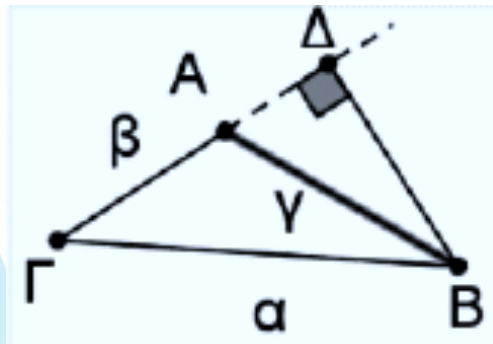
$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$$

Επειδή $\hat{A} > 90^\circ$ το Δ βρίσκεται στην προέκταση της

ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta \Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε $\Delta \Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και

$\Delta \Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$ στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα $\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$



Κριτήριο για το είδος της γωνίας τριγώνου

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές α, β, γ συνδέονται με μία από τις παρακάτω σχέσεις τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε το είδος της αντίστοιχης γωνίας.

- $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^\circ$
- $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^\circ$

Νόμος συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Εμβαδά

10.1 Πολυγωνικά Χωρία

10.2 Ισοδύναμα Ευθύγραμμα Σχήματα

Ορισμός: Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**

10.3 Εμβαδόν βασικών Ευθύγραμμων Σχημάτων

Θεώρημα

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α , είναι α^2 , δηλαδή: $E = \alpha^2$

Θεώρημα

Το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο της μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot v_{\alpha} = \beta \cdot v_{\beta}$$

Όπου α, β οι πλευρές και v_{α}, v_{β} τα αντίστοιχα ύψη.

Απόδειξη

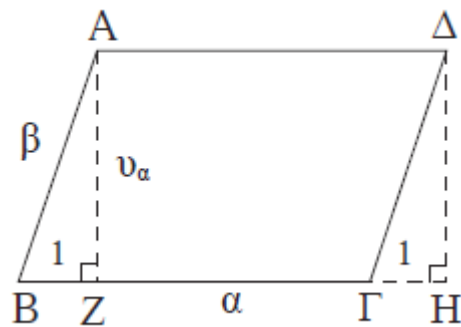
Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλογράμμο $AB\Gamma\Delta$ και ας φέρουμε το ύψος AZ που αντιστοιχεί στη $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AZ$. Από το Δ φέρουμε DH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Τότε τα τρίγωνα ZBA και $H\Gamma\Delta$ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, $AB = \Delta\Gamma$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε:

$(ZBA) = (H\Gamma\Delta)$ (1). Όμως

$(AB\Gamma\Delta) = (ABZ) + (AZ\Gamma\Delta)$, οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$(AB\Gamma\Delta) = (AZ\Gamma\Delta) + (\Delta\Gamma H) = (AZH\Delta)$.

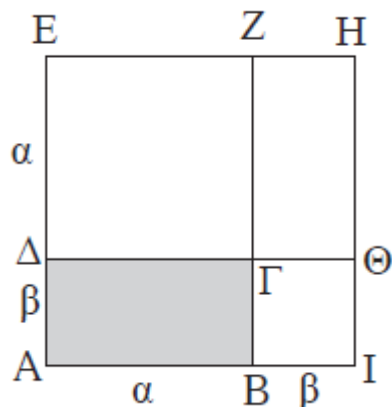
Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = (AZH\Delta) = A\Delta \cdot AZ = B\Gamma \cdot AZ$



Θεώρημα

Το εμβαδό ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή αν α, β οι πλευρές και E το εμβαδόν του, τότε $E = \alpha \cdot \beta$

Απόδειξη



Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α , την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $\alpha + \beta$ και επομένως είναι:

$$(ΑΙΗΕ) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1)$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Είναι:

$$(ΔΓΖΕ) = \alpha^2,$$

$$(ΒΙΘΓ) = \beta^2 \text{ και } (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) \quad (2)$$

Είναι $(ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ)$, οπότε από τις (1), (2) προκύπτει:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2(ΑΒΓΔ) + \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$$

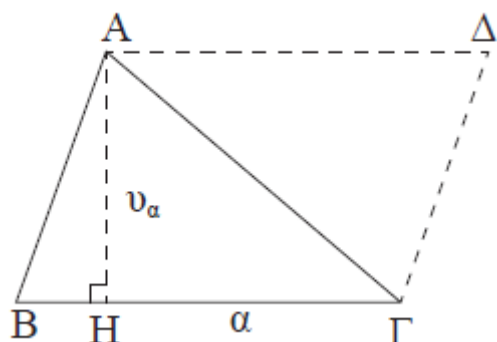
$$(ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \beta$$

Θεώρημα

Το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο

$$\upsilon\sigma\omicron\varsigma, \text{ δηλαδή } E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

Απόδειξη



Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι $(ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \upsilon_\alpha \quad (1)$.

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε: $(ΑΒΓ) = (ΔΑΓ) \quad (2)$

Από το σχήμα έχουμε ότι

$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ)$ η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot \upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \Leftrightarrow (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$$

Θεώρημα

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot v$

Απόδειξη

Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ // ΑΔ), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

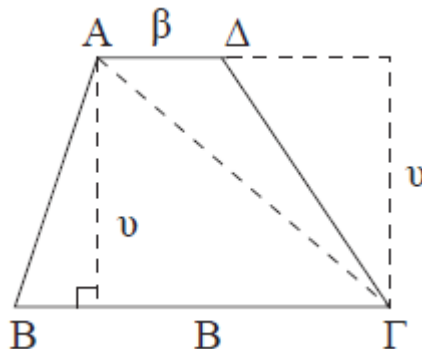
$$E = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1)$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}B \cdot v \text{ και } (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\beta \cdot v \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (2) στην (1) προκύπτει

ότι $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot v$, δηλαδή το ζητούμενο.



Πόρισμα 1

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Πόρισμα 2

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.



Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου είναι $E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$



Το εμβαδό ρόμβου είναι $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$, όπου δ_1, δ_2 οι διαγώνιοι του ρόμβου

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν του τριγώνου

i. $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου

ii. $E = \tau\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

iii. $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

iv. $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha\gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \eta\mu \Gamma$

Αποδείξεις

- ii. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (I, ρ) . Τα τρίγωνα $IB\Gamma$, $I\Gamma A$ και IAB έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε:

$$E = (AB\Gamma) = (IAB) + (IB\Gamma) + (I\Gamma A) \iff$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma\rho + \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \frac{1}{2} \cdot 2\tau \cdot \rho = \tau\rho$$

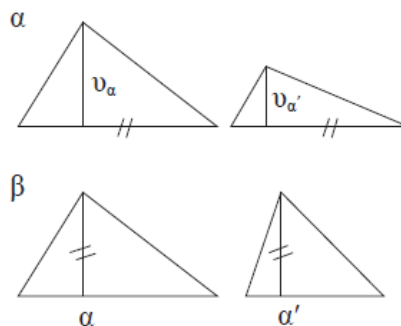
- iii. Γνωρίζουμε ότι $\beta\gamma = 2Rv_\alpha$, οπότε $v_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$

$$\text{Είναι } E = \frac{1}{2}\alpha \cdot v_\alpha = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\beta\gamma}{2R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

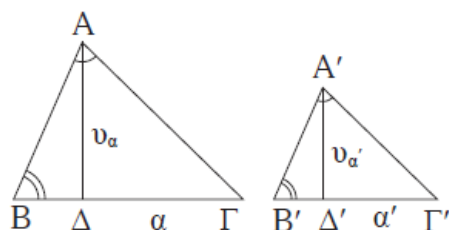
Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.



Θεώρημα

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη



Έστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$. Είναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}} = \lambda$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.

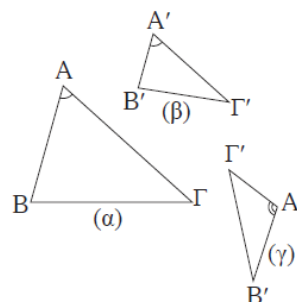
$$\text{Είναι } \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\alpha v_\alpha}{\frac{1}{2}\alpha' v_{\alpha'}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}} = \lambda^2$$

Θεώρημα

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Θεώρημα

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$, τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ότι $\eta\mu A = \eta\mu A'$, οπότε:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A}{\frac{1}{2}\beta'\gamma' \cdot \eta\mu A'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Μέτρηση Κύκλου

11.1 Ορισμός Κανονικού Πολυγώνου

Ορισμός: Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Γωνία κανονικού πολυγώνου

Έστω $A_1A_2\dots A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dots = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$. Τότε
$$\varphi_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}.$$

Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Αν δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Θεώρημα

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλο. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

- Το κοινό κέντρο του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου ενός κανονικού πολυγώνου, λέγεται **κέντρο** του πολυγώνου.
- Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ακτίνα** του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του (δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου) λέγεται **απόστημα** του πολυγώνου.
- Κάθε γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται **κεντρική γωνία** του πολυγώνου.

Σε κάθε κανονικό πολύγωνο, ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$	$\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$
$P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$	$E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
$\varphi_\nu + \omega_\nu = 180^\circ$	$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{R}{R'}$

Όπου:

α_ν : απόστημα

λ_ν : πλευρά πολυγώνου

ω_ν : κεντρική γωνία

φ_ν : γωνία (κανονική) πολυγώνου

P_ν : περίμετρος πολυγώνου

Πόρισμα

Σε δύο κανονικά πολύγωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Αντωνάτος Γιώργος
Μαθηματικός

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

	Τετράγωνο	Κανονικό εξαγώνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

11.5 Μήκος Κύκλου – Μήκος τόξου

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$

Μήκος τόξου μ μοιρών: $l = \frac{\pi R \mu}{180^\circ}$

Μήκος τόξου α rad: $l = \alpha R$

Ακτίνιο λέγεται ένα τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

11.7 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – κυκλικού τομέα – κυκλικού τμήματος

Εμβαδόν κύκλου: $E = \pi R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $(\widehat{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{1}{2} \alpha R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος: $\varepsilon = (OAB) - E_{OAB}$ (αφαιρούμε απο το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, το εμβαδόν του τριγώνου OAB)

